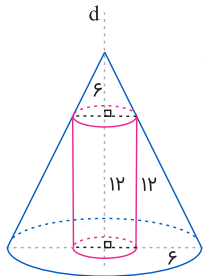




گزینه ۱

۱



شکل فضایی حاصل یک مخروط می‌باشد که یک استوانه از آن برداشته شده است. فرض کنیم r شعاع قاعده استوانه باشد، با استفاده از تعمیم قضیه تالس داریم:

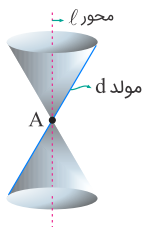
$$\frac{r}{r+6} = \frac{6}{6+12} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفصیل نسبت در مخرج}} \frac{r}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 3$$

$$\text{حجم شکل فضایی حاصل} = \frac{1}{3}\pi(3+6)^2 \times (6+12) - \pi \times 3^2 \times 12 = 486\pi - 108\pi = 378\pi$$

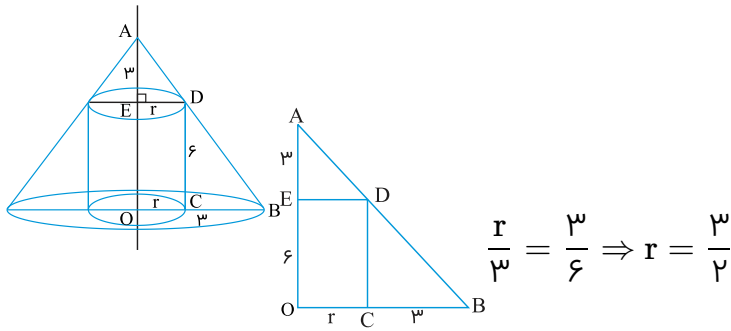
گزینه ۳

۲

اگر صفحه بر محور عمود نباشد و موازی مولد نباشد، می‌تواند فصل مشترک بیضی یا هذلولی باشد. اگر این صفحه از رأس A بگذرد، فصل مشترک یک نقطه است. اگر این صفحه از محور بگذرد، فصل مشترک دو خط متقاطع است. پس گزاره‌های الف، ب و ث ساخته نمی‌شود.



از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. شکل فضایی حاصل، یک مخروط است که یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع ۶ از آن برداشته شده است.

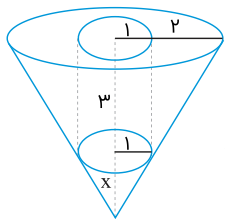


از تشابه دو مثلث AED و DCB به دست می‌آید:

حجم شکل فضایی حاصل:

$$\frac{1}{3}\pi\left(3 + \frac{3}{2}\right)^2 \times (3 + 6) - \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 6 = \frac{189}{4}\pi$$

شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود.



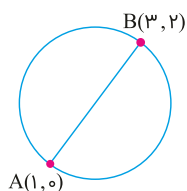
تالس: $\frac{x}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3$

مخروط بزرگ $V = \frac{\pi}{3}(2)^2(3 + \frac{3}{2}) = 3\pi \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2}\pi$

مخروط کوچک $V = \frac{\pi}{3}(1)^2 \times \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2}$

حجم استوانه $V = \pi(1)^2(3) = 3\pi$

حجم اصلی $V = \frac{27\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 3\pi = 10\pi$

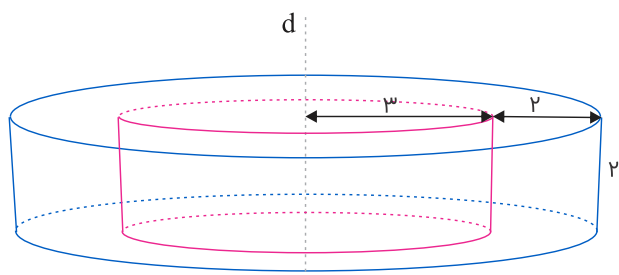


مرکز دایره : $\frac{A+B}{2} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 1)$

$2r = AB \Rightarrow 2r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

معادله دایره : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$



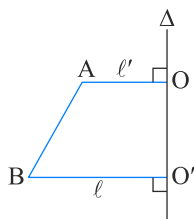
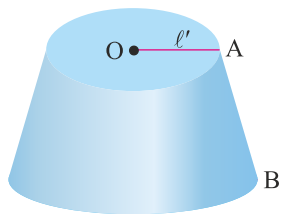
شکل حاصل از این دوران یک استوانه به شعاع ۵ واحد است که در داخل آن استوانه‌ای توخالی به شعاع ۳ واحد قرار دارد.

حجم استوانه کوچک - حجم استوانه بزرگ = حجم شکل

$= \pi(5)^2 \times 2 - \pi(3)^2 \times 2 = 2\pi(25 - 9) = 32\pi$

AB وسط $\omega = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4, 3)$

از دوران پاره خط AB حول d مخروطی پدید می‌آید که قسمت بالای آن حذف شده است، که به آن مخروط ناقص می‌گوییم.



گزینه ۲

۹

ابتدا مختصات مرکزها و مقادیر شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 31 = 0 \Rightarrow O_1(2, -1), R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 + 4 \times 31} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + m = 0 \Rightarrow O_2(-2, 2), R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 - 4m} = \sqrt{\lambda - m}$$

طول خط‌المركزين دو دایره $O_1O_2 = 5$ است، بنابراین دو دایره نمی‌توانند مماس خارج باشند و فقط مماس داخل ممکن است:

$$O_1O_2 = |R_1 - R_2| \Rightarrow 5 = |6 - \sqrt{\lambda - m}| \Rightarrow \begin{cases} 5 = 6 - \sqrt{\lambda - m} \Rightarrow m = 7 \\ 5 = \sqrt{\lambda - m} - 6 \Rightarrow m = -113 \end{cases}$$

گزینه ۱

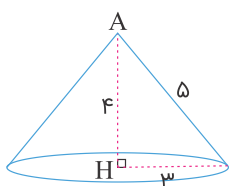
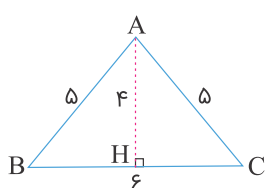
۱۰

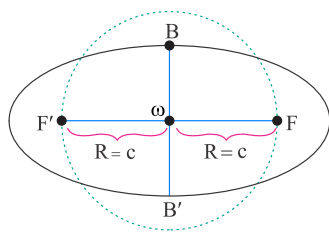
اندازه ارتفاع وارد بر ضلع $BC = 6$ طول کوتاه‌ترین ارتفاع خواهد بود.

$$AH = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

شکل حاصل از دوران حول این ارتفاع یک مخروط با شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ است. بنابراین:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$





بیشترین مساحت، مساحت مثلث FBF' است زیرا بیشترین ارتفاع را دارد.

$$(\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}y - \sqrt{2})^2 = 12 \Rightarrow \sqrt{2}(x+1)^2 + \sqrt{2}(y-1)^2 = 12$$

$$\xrightarrow{\div \sqrt{2}} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 6$$

$$\omega(-1, 1), R = \sqrt{3} = c, \sqrt{2}b = \sqrt{2}\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$S(\triangle FBF') = \frac{1}{\sqrt{2}} \times b \times \sqrt{2}c = b \times c = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

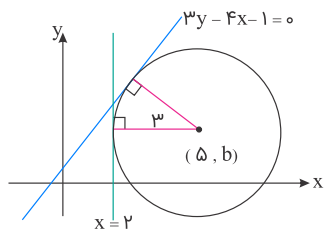
$$|MF| + |MF'| = \sqrt{2}a$$

$$|FF'| = \sqrt{2}c \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{2}c \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$FF' \text{ وسط } w = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}, 0 \right) = (\sqrt{2}, 0)$$

$$|wA| = a = |\sqrt{5} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{6}$$

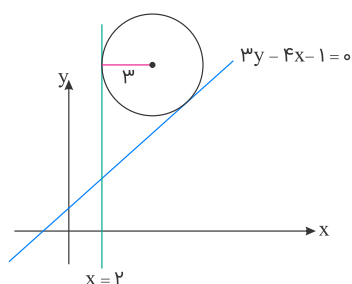
باتوجه به شکل، طول مرکز ۵ است و فاصله آن از خط $3y - 4x - 1 = 0$ برابر با شعاع دایره است.



$$\left| \frac{3b - 4(5) - 1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = 3 \Rightarrow |3b - 21| = 15 \Rightarrow |b - 7| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 7 = 5 \Rightarrow b = 12 \\ b - 7 = -5 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

توجه کنید در حالتی که $b = 12$ است، شکل به صورت زیر است:



ابتدا معادله دایره را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4, O'(1, 2), r' = 2$$

$$OO' = \sqrt{(1 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = 3$$

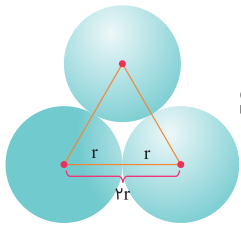
چون دو دایره مماس خارج هستند، پس:

$$OO' = r + r' \Rightarrow 3 = r + 2 \Rightarrow r = 1$$

سطح مقطع حاصل از برخورد یک کره با یک صفحه همواره دایره است. پس سطح مقطع حاصل از برخورد نیمکره با صفحه قسمتی از دایره می شود.

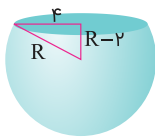
نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

اگر شعاع دایره مقطع هر کره r باشد، از به هم وصل کردن مرکز سه کره مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $2r$ به دست می آید: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به وجود آمده برابر $16\sqrt{3}$ است، بنابراین داریم:



$$S_{\text{مثلث متساوی الاضلاع}} = 16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 \Rightarrow (2r)^2 = 64 \Rightarrow r = 4$$

شعاع کره را R در نظر می گیریم. سطح مقطع یکی از کره ها به شکل زیر است:



$$R^2 = (R-2)^2 + 16 \Rightarrow R^2 = R^2 - 4R + 4 + 16 \Rightarrow R = 5$$

دورترین نقطه از کانون همان دورترین رأس و نزدیک ترین نقطه به کانون رأس مقابل آن خواهد بود.

$$a + c = 3(a - c) \Rightarrow a + c = 3a - 3c \Rightarrow 4c = 2a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

فصل مشترک یک صفحه با یک سطح مخروطی، هیچ گاه دو خط موازی نمی شود.

فاصله مرکز کره (O) از هریک از وجه های چهار وجهی برابر با شعاع کره محاطی می باشد (r). از طرفی چون وجوه چهار وجهی برابر است می توان چهار وجهی را متشکل از ۴ هرم همنهشت به رأس O ، قاعده وجوه و ارتفاع r در نظر گرفت، پس خواهیم داشت:

$$4V_{\text{هرم های کوچک}} = V_{\text{هرم اصلی}} \Rightarrow 4 \times \frac{1}{3} \times r \times S_{\text{وجه}} = \frac{1}{3} \times h \times S_{\text{وجه}} \Rightarrow 4r = h$$

$$\xrightarrow{h=24} r = 6 \Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi$$

تعریف بیضی در گزینه ۳ مناسب و کامل است.